Montpellier 94

① $A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} = \frac{(3^2\times5^2\times7^2)+(5^2\times7^2)+(3^2\times7^2)+(3^2\times5^2)}{3^2\times5^2\times7^2}$

$A = \frac{12916}{11025}$ Pour trouver la fraction irréductible il faut diviser le numérateur et le dénominateur par leur plus grand diviseur commun.

Le plus grand diviseur commun se trouve à partir des décompositions en facteurs premiers
$11025 = 3^2\times5^2\times7^2$.
12916 n'est divisible ni par 3 ni par 5 ni par 7 donc sa décomposition en facteurs premiers ne contient ni 3, ni 5, ni 7 et par conséquent le plus grand diviseur commun à 11025 et 12916 est 1
A est donc une fraction irréductible.

② $B = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{(7\times16)+1}{16}} = 3 + \frac{16}{(7\times16)+1} = 3 + \frac{16}{113}$

$B = \frac{(3\times113)+16}{113} = \frac{355}{113}$

③ •

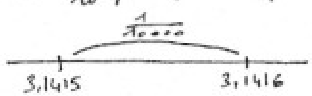
355	113
0160	3,141592
470	
0180	
670	
1050	
0330	
104	

$3,1415 < B < 3,1416$
3,1415 est une valeur approchée de B à un dix-millième près par défaut.

• $C = \sqrt{\frac{8\times12916}{11025}}$ La séquence 8 ⊗ 12916 ÷ 11025 = √ donne 3,0613974

Par conséquent $3,0613 < C < 3,0614$
3,0613 est une valeur approchée de C à $\frac{1}{10000}$ près par défaut

• $C < 3,0614 < 3,1415 < \pi$ donc $C < \pi$.
$-3,0614 < -C < -3,0613$ donc $\pi - C < 3,1416 - 3,0613 = 0,0803$
donc $\pi - C < 0,1$ donc C est bien une valeur approchée de π à $\frac{1}{10}$ près par défaut.

• 

B et π sont dans cet intervalle donc leur différence est inférieure à $\frac{1}{10000}$

En utilisant l'encadrement donné on peut dire que B est une valeur approchée de π à $\frac{1}{10000}$ près.

La touche π d'une calculatrice donne 3,1415927
On a donc $3,141592 < \pi < 3,141593$
et $3,141592 < B < 3,141593$
Par conséquent B est une valeur approchée de π à 10^{-6} près.

On peut retenir les premières décimales de π à l'aide de la phrase suivante :

Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages
3,1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

②

	-7	$\sqrt{3}$	$\frac{15}{3}$	3^{-2}	$\frac{3}{4}$	π	$\frac{22}{7}$	3,14
$\mathbb{N}$			x					
$\mathbb{Z}$	x		x					
$\mathbb{D}$	x		x		x			x
$\mathbb{Q}$	x		x	x	x		x	x
$\mathbb{R}$	x	x	x	x	x	x	x	x

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

③ - $\frac{5}{8} = 0,625 \in \mathbb{D}$ la 1000ème décimale est 0

- π est irrationnel, pour trouver sa 1000ème décimale il faudrait une table des décimales de π

- $\sqrt{81} = 9 \in \mathbb{N}$ La 1000ème décimale est 0

- $\frac{4}{3} = 1,333\ldots = 1,\overline{3}$ la 1000ème décimale est 3

- $\frac{133}{52} = 2,55\underbrace{769230}\underbrace{769230}\ldots = 2,55\overline{769230}$

$$\begin{array}{r|l} 998 & 6 \\ \hline 39 & 166 \\ 38 & \\ 2 & \end{array}$$

$998 = (6 \times 166) + 2$ La 1000ème décimale est donc le 2ème chiffre de la 167ème séquence c'est-à-dire 6

④ $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$

$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{-1} = -(3+2\sqrt{2})$

$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}][(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}]} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$

$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

⑤ • $6,9280 < 4\sqrt{3} < 6,9284$

$13,9280 < 7+4\sqrt{3} < 13,9284$ 13,928 est une valeur approchée à 0,001 près par défaut de $7+4\sqrt{3}$ car $13,928 < 7+4\sqrt{3} < 13,929$

• $-6,9284 < -\sqrt{3} < -6,9280$

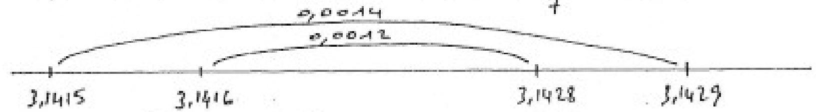
$0,0716 < 7-4\sqrt{3} < 0,0720$ donc $0,071 < 7-4\sqrt{3} < 0,072$ et par conséquent 0,071 est une valeur approchée 0,001 près par défaut de $7-4\sqrt{3}$

⑥ ⓐ $\pi = 3,14159\ldots$ développement décimal illimité non périodique

$\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}$

On en déduit que

$3,1415 < \pi < 3,1416$ et $3,1428 < \frac{22}{7} < 3,1429$



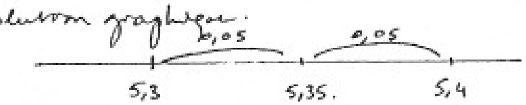
Cela prouve* que $\pi < \frac{22}{7}$ et $0,0012 < \frac{22}{7} - \pi < 0,0014$

ⓑ $\frac{22}{7} - \pi < 0,0014 < 0,0015 < 0,1$ donc les deux phrases sont vraies

ⓒ $2,7 < x$ et $x - 2,7 < 10^{-2} = 0,01$ donc $x < 2,71$.

On a donc $2,7 < x < 2,71$

ⓓ Résolution graphique.



L'écart entre y et 5,35 est inférieur à 0,05 donc 5,35 est une valeur approchée à 0,05 près de y.

Sans information supplémentaire sur y on ne sait pas si c'est une valeur approchée par défaut ou par excès.

* démonstration.

. $\pi < 3,1416$; $3,1416 < 3,1428$; $3,1428 < \frac{22}{7}$ donc par transitivité $\pi < \frac{22}{7}$

. $3,1415 < \pi < 3,1416$ donc $-3,1416 < -\pi < -3,1415$.

donc $3,1428 + (-3,1416) < \frac{22}{7} + (-\pi) < 3,1429 + (-3,1415)$

$0,012 < \frac{22}{7} - \pi < 0,0014$